



**Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques et Sciences Médicales**

**Avis de Soutenance**  
**THESE DE DOCTORAT**

Présentée par

**Monsieur OUSSAMA AYMANE ES SAFI**

Discipline : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Spécialité : Algèbre

Sujet de la thèse

**Généralisation de certaines notions algébriques et homologiques**

Formation Doctorale " Sciences de l'Ingénieur, Sciences Physique, Mathématiques et Informatique"

Thèse présentée et soutenue **le samedi 13 juillet 2024 à 10h** au Centre de Conférences de la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, devant le jury composé de :

| NOM ET PRÉNOM         | TITRE | ETABLISSEMENT  |                    |
|-----------------------|-------|--|--------------------|
| El Hassan EL KINANI   | PES   | Faculté des Sciences de Meknès                                 | Président          |
| Mohammed TAMEKKANTE   | PES   | Faculté des Sciences de Meknès                                 | Rapporteur         |
| Mohamed CHHITI        | PES   | Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales de Fès | Rapporteur         |
| Khalid LOUARTITI      | PH    | Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Tétouan             | Rapporteur         |
| Chahrazade BAKKARI    | PES   | Faculté des Sciences de Meknès                                 | Examineur          |
| Hakima MOUANIS        | PES   | Faculté des Sciences Dhar El Mehraz de Fès                     | Examineur          |
| Lahcen OUKHTITE       | PES   | Faculté des Sciences et Techniques de Fès                      | Examineur          |
| Karima ALAOUI ISMAILI | PH    | Faculté des Sciences de Rabat                                  | Examineur          |
| Najib MAHDOU          | PES   | Faculté des Sciences et Techniques de Fès                      | Directeur de Thèse |

Laboratoire de recherche : Modélisation et Structures Mathématiques

Etablissement : Faculté des Sciences et Techniques de Fès



**Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques et Sciences Médicales**

## **Résumé de la thèse**

Grâce à leurs fameuses propriétés, les anneaux Noethériens ont une grande importance dans l'algèbre commutative. L'une des plus importantes propriétés de ces anneaux est la stationnarité de leurs chaînes ascendantes. Ces anneaux sont aussi caractérisés par le fait que leurs idéaux sont de type fini. L'étude systématique de ces anneaux a commencé par la mathématicienne Noether. Dès lors, d'énormes efforts se sont employés pour mieux explorer cette famille d'anneaux. Jusqu'à nos jours, les généralisations de cette notion n'ont cessé d'être proposées depuis [42]. Mais la plus proche de la notion de noethérien reste celle proposée par R.Dastapour et A.Ghorbani [26] en 2017. Selon ces deux auteurs, un anneau  $A$  satisfait ACCd sur ses idéaux, si toute chaîne ascendante d'idéaux se stabilise après un certain rang, mais à coefficients multiplicatifs près. C'est-à-dire qu'après un certain rang, tout idéal de la chaîne est multiple du suivant par un élément de  $A$ . Si on impose aux coefficients de multiplicité d'être inversibles, l'anneau  $R$  sera donc noethérien.

D'une manière analogue, ces deux auteurs dans le même travail ont introduit les anneaux vérifiant DCCd condition comme une généralisation d'anneaux Artiniens. C'est une notion duale de la noetherianité. Ceci explique les efforts investis par les mathématiciens dans l'étude de cette classe d'anneaux. La définition d'un anneau vérifiant DCCd est semblable à celle d'un anneau satisfaisant ACC-d quitte à remplacer suites ascendantes par suites descendantes. A cause de la non-réversibilité des coefficients de multiplicité, les nouvelles notions sont moins généreuses que leurs antécédents. Mais malgré cela, grâce à la grande ressemblance entre les deux concepts, ces deux nouvelles classes auront aussi une grande importance dans l'algèbre commutative. La première partie de cette thèse est consacrée à étudier plus profondément ces anneaux. Le but est d'établir de nouvelles propriétés intéressantes qui peuvent attirer l'attention des mathématiciens.

Ainsi, cette thèse contient quatre chapitres, dont le premier est consacré à l'étude des anneaux vérifiant la condition ACCd. Le second est consacré à l'exploration des nouvelles propriétés des anneaux qui satisfont la condition DCCd. Dans le troisième chapitre, nous introduisons une nouvelle S-version de la notion de projectivité qu'on appelle Strongly S-projectivity. Cette dernière représente aussi une importante notion algébrique. Cela provient du fait que les modules projectifs sont des facteurs directs des modules libres. Ceci est équivalent à la factorisation de tout homomorphisme allant de ces modules vers l'image de



### **Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques et Sciences Médicales**

certaines autres modules. Il y a aussi une caractérisation de ces modules par les suites courtes exactes. Cette diversité dans la caractérisation des modules projectifs a permis d'établir plusieurs propriétés importantes concernant ce type d'anneaux. Ceci explique l'existence d'une variété des S-versions de cette notion. Parmi ses travaux, on trouve celui effectué par Zhang et Qib [62]. Ceux-ci ont utilisé dans leur définition une nouvelle version de suites courtes exactes. Ils ont établi dans leur travail des résultats intéressants. Quant à nous, dans le troisième chapitre, nous avons donné une définition qui est conforme à celle des anneaux S-Noethériens. Ceci nous a permis d'explorer des variantes de certaines propriétés connues dans le cas des anneaux projectifs. De plus, nous avons montré que notre version entraîne celle définie par Eric. Par la suite, nous avons profité de tous les résultats qu'il a prouvés. A partir de cette définition, on a défini une S-version de l'héréditaire et de la semi-héréditaire.

Dans le quatrième chapitre, nous avons introduit des nouvelles S-versions de plusieurs notions concernant certains types d'anneaux que nous avons appelé S-ring. Ces derniers sont ceux dont chacun de ses idéaux admet des subidéaux. En se basant sur ces idéaux, nous avons défini la notion de S-injectivité. Ceci, nous a permis de définir quelques S-dimension elle la c-S-dimension injective. En se basant sur ces nouvelles dimensions, nous avons généralisé certaines notions algébriques classiques. Nous avons étudié ces nouvelles notions en examinant l'analogie de celles-ci avec leurs versions classiques.

Mots-clés : Les différentes notions algébriques telles que le Noethérien, l'artinicité, la projectivité, l'injectivité, la platitude, la simplicité, la semi-simplicité et autres. Les dimensions homologiques : la dimension injective, la dimension projective. Les S-versions de ces notions algébriques.